

Algebra Lineare e Geometria
Fac-simile di esame (tempo 2 ore)
Laurea in Astronomia

Nome e Cognome _____
Matricola _____

Esercizio 1	Esercizio 2	Esercizio 3	Esercizio 4

1) Siano

$$V_1 = M_{2 \times 2}(\mathbb{R}), \quad V_2 = \mathbb{R}[x]_{\leq 3}.$$

Costruire un'applicazione lineare f da V_1 a V_2 se possibile, altrimenti mostrare che non può esistere, nei seguenti casi:

a) [2 pti]

$$\ker f = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \wedge \quad f \left(\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right) = x$$

b) [2 pti] L'applicazione sia suriettiva ma non iniettiva

c) [2 pti] L'applicazione non sia iniettiva e tale che $\text{Im } f = \langle x, x + x^2 \rangle$

2) Siano dati in \mathbb{R}^4 i due seguenti sottospazi

$$V_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle \quad V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : z - t = 0 \quad \wedge \quad x = 0 \right\}.$$

a) [2 pti] Calcolare la dimensione e fornire una base per entrambi i sottospazi vettoriali.

b) [4 pti] Calcolare dimensione e fornire una base per i sottospazi $V_1 + V_2$ e $V_1 \cap V_2$.

3) Sia

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & k & 4 \\ 1 & 2 & k \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

- a) [3 pti] Discutere il rango di A_k al variare di k .
- b) [3 pti] Sia $k = 2$, trovare gli autovalori di A_2 e dire se è diagonalizzabile.
- 4) Sia \mathbb{R}^3 dotato del prodotto scalare standard. Siano

$$\pi_k : 3x + 2y - kz + 1 = 0, \quad r : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 3t \end{cases}$$

- a) [4 pti] Discutere, al variare di k , la posizione reciproca tra π_k ed r .
- b) [3 pti] Esiste un valore di k per cui il piano e la retta sono ortogonali tra di loro?
- c) [3 pti] Sia $k = 2$, trovare una retta ortogonale a π_2 passante per il punto $P = (1 \ 3 \ 7)$. Quante rette con queste proprietà esistono?
- d) [2 pti] Trovare una retta parallela ad r e passante per P .